TEORIA DE CAMPOS ESCALARES Y CAMPOS VECTORIALES

MIGUEL ANGEL PASCUAL IGLESIAS

GUIÓN DEL TEMA

1.- Campos Escalares y Vectoriales.
2.- Superficies de nivel de un campo escalar. Linea de Campo de un campo Vectorial.
3.- Gradiente de un campo escalar. El operador Nabla o Hamiltoniano.
4.- Circulación de un vector. Campos Conservativos.
5.- Representación vectorial de una superficie.
6.- Flujo a través de una superficie.
7.- Divergencia de un campo vectorial. Teorema de Gauss. Campos Solenoidales.
8.- Rotacional de un campo vectorial. Teorema de Stokes. Campos Irrotacionales.
9.-El operador Laplaciana. Laplaciana de un Escalar y Laplaciana de un campo Vectorial.

Conocimientos previos

1.- Magnitudes escalares y vectoriales
2.- Magnitudes físicas fundamentales y derivadas. Sistema internacional de unidades. Homogeneidad de las ecuaciones físicas.
3.- Álgebra vectorial (definición geométrica de vector, vectores equipolentes, clasificación de vectores, componentes de un vector, versores, componentes cartesianas, módulo, cosenos directores, suma y diferencia, producto de un escalar por un vector, producto escalar de dos vectores, producto vectorial, derivada de un vector, momento polar).
4.- Sistemas de coordenadas: cartesianas y polares.

¡ El alumno los puede repasar en cualquiera de los libros de texto de Física que haya utilizado anteriormente ¡.

BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA

1.- Richmond B. McQuistan**, Campos escalares y vectoriales,** Ed. Limusa, 1978.
2.- Murray R. Spiegel, **Análisis vectorial**, Ed McGraw-Hill, 1991.
3.- P. Puig Adam, **Cálculo integral**, Biblioteca Matemática S.L., 1976.
4.- Luis Bru Villaseca, **Mecánica Física,** Ed. Nuevas Gráficas, 1963.

1.- CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

Se puede establecer una correspondencia entre los puntos de un espacio físico y las medidas de las magnitudes físicas que en ellos tienen existencia. Mediante esta correspondencia se pueden definir en dichos puntos funciones **escalares** o **vectoriales.**

Al conjunto de valores de estas funciones se le suele conocer con el nombre de **Campo Escalar o Campo Vectorial.**

Si los campos son independientes del tiempo se llaman **Campos Estacionarios**, y si la magnitud vectorial o escalar es la misma en todos los puntos **Campos Uniformes.** Un campo serár Estacionario y no Uniforme, si no cambia su valor en el tiempo, pero es distinto en cada punto del espacio en que exista, por ejemplo el campo de velocidades de las partículas de un fluido, en un canal en régimen regular. Igualmente un Campo puede ser Uniforme y no estacionario o bien Uniforme y estacionario.

Características de los Campos Escalares y Vectoriales

a) Univaluados.- El valor de la magnitud escalar o vectorial asignada a cada punto es única.
b) Acotados.- Existe un número tal que la magnitud del campo es menor.
c) Contínuos.- Los valores del Campo en un punto son independientes de la dirección por la que nos acerquemos y coincide con el valor del campo en el punto.
d) Lineales.- Los vectores que constituyen un campo de dimensión n, se pueden expresar como combinación lineal de n vectores.
e) Diferenciables.

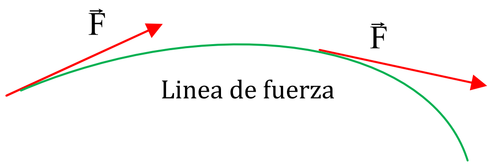
2.- SUPERFICIES DE NIVEL DE UN CAMPO ESCALAR. LINEAS DE CAMPO DE UN CAMPO VECTORIAL

Superficie de nivel de un campo escalar

Es el lugar geométrico de los puntos a los cuales corresponde un mismo valor del escalar en un instante dado. Si el campo viene dado por a (x,y,z,t), la superficie de nivel vendrá dada por a (x,y,z,t) = C. Para cada valor de C, tendremos una superficie de nivel, por tanto conociendo el valor del campo en un punto, conocemos el valor del parámetro de la superficie de nivel que pasa por ese punto.

Líneas de campo (campo vectorial)

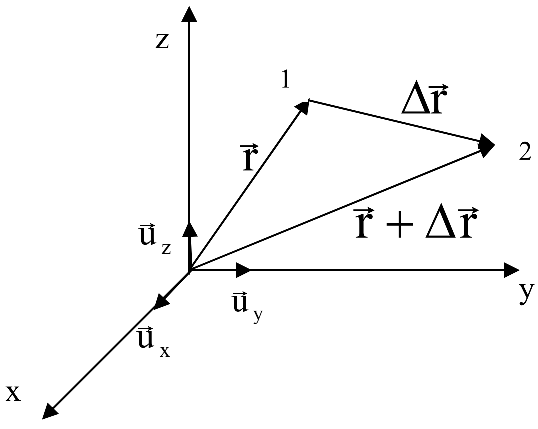
Son líneas tal que en cada uno de sus puntos el campo vectorial es tangente a ellas. Dos líneas de campo no se pueden cortar (univaluado).



3.- GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR. EL OPERADOR NABLA O HAMILTONIANO

Gradiente de un campo escalar a (x,y,z,t)

Calculemos la relación existente entre el valor del campo en un punto y el valor en otro muy próximo, en una dirección determinada y en un instante dado.



Sea **a**(x,y,z), una campo escalar de valor perfectamente determinado en cada punto del espacio y por tanto en los puntos 1 y 2 de la figura, muy próximos entre si y situados respecto al sistema de referencia por los vectores de posición $\vec{r}$ y $\vec{r} + \Delta\vec{r}$.

La variación del campo escalar a (x,y,z), se puede expresar como $\Delta a = \frac{\partial a}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial a}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial a}{\partial z}\Delta z$

En el límite cuando $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ tienden a cero se debe poner :

$$\boxed{da = \frac{\partial a}{\partial x}dx + \frac{\partial a}{\partial y}dy + \frac{\partial a}{\partial z}dz}$$

La expresión anterior, puede verse como el resultado de realizar el producto escalar de dos magnitudes de carácter vectorial (vectores), como son:

$\frac{\partial a}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial a}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial a}{\partial z}\vec{u}_z = \text{grad } \mathbf{a}$ que vamos a denominar gradiente de a

y el vector desplazamiento $\mathbf{d\vec{l} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z}$,

por tanto se puede expresar como **da = grad a • d$\vec{l}$**

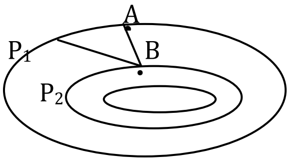
El Gradiente es un operador de caracter vectorial, que representamos por **grad** o por el simbolo ∇ llamado nabla **y cuyas componentes son: grad =** $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$

La aplicación de **nabla** a un campo escalar o el calculo del gradiente de un Campo Escalar supone obtener un vector, cuyas componentes son las derivadas del Campo Escalar respecto a **x, y , z** respectivamente.

Dirección del Vector Gradiente.- Se toma como tal aquella en que la función escalar alcanza su máximo valor. Como da = grad a . d$\vec{l}$ será maximo si cos θ = 1 ; θ = 0. **Por tanto el vector gradiente es perpendicular a las superficies de nivel.**

Sentido del vector gradiente:- Consideremos una superficie de nivel a (x,y,z) = Cte. y en ella una trayectoria, el vector dl será tangente a dicha trayectoria y a la superficie de nivel, como la variación del campo escalar a, a lo largo de dicha trayectoria es cero por estar esta contenida en una superficie de nivel, resulta que **da = grad a . d$\vec{l}$** será cero, como el vector grad a y el vector d$\vec{l}$ son, en general, distintos de cero, deberán ser perpendiculares y por tanto **grad a** tiene que ser un vector perpendicular a la superficie de nivel.**El sentido del vector gradiente es hacia valores crecientes de la superficie de nivel**.

Sentido físico del gradiente



Consideremos un mapa de isobaras. Del punto A de la isobara P_1, se puede ir a cualquier punto de la isobara P_2, ahora bien la mayor variación por unidad de longitud, corresponde al camino AB, que es perpendicular a las indicadas isobaras y en la dirección que corresponde al gradiente.

Por tanto el gradiente de una función escalar, nos da cuenta de la variación espacial de esta función e indica la dirección en que hay que desplazarse para conseguir la variación más rápida. Su sentido como **se ha dicho anteriormente, es hacia valores crecientes de la función escalar.**

Vector gradiente.-

Dirección: En cada punto la perpendicular a la superficie de nivel que pasa por él.
Sentido: El de crecimiento de la función escalar.
Módulo: El de la derivada de la función en esa dirección y sentido.

Ejemplos:

1.- Sea V= X sen y + y. Calcular el vector grad V y el valor de su módulo

R.- Grad V= ∇ V= $\frac{\partial(\text{x seny+y})}{\partial \text{x}}\ \vec{u}_x + \frac{\partial(\text{x sen y})}{\partial \text{y}} \vec{u}_y + \frac{\partial(\text{x seny+y})}{\partial \text{z}} \vec{u}_z$

Grad V= seny $\vec{u}_x$ +(x cos y+1)$\vec{u}_y$+ 0 $\vec{u}_z$; |Grad V|= $\sqrt{(\text{seny})^2+(\text{xcosy}+1)^2}$

2.- Hallar el vector unitario, normal a la superficie $x \,.\, y + y \,.\, z - x.\, z = 7$ en el punto (1, 3, 2).

R.- Al ser el vector gradiente de un campo escalar perpendicular a la superficie de nivel, el vector normal a las superficie dada se pueden hallar obteniendo el vector gradiente de dicha superfici.

El Vector normal a la superficie - x . y + y . z – x. z = 18 será el vector **Grad (x . y + y . z – x. z – 18)=**

$$\frac{\partial(x.y + y.z - x.z-18)}{\partial x}\ \vec{u}_x + \frac{\partial(x.y + y.z - x.z-18)}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial(x.y + y.z - x.z- 18)}{\partial z} \vec{u}_z = (y - z)\ \vec{u}_x + (x+z)\vec{u}_y + (y-x)\ \vec{u}_z = \vec{a}\ ; \qquad \vec{a}\ (1, 3, 2) = \vec{u}_x + 3\vec{u}_y + 2\ \vec{u}_z$$

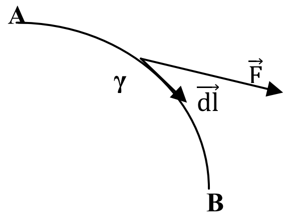
El vector unitario de un vector, se obtiene dividiendo cada componente entre el módulo del vector.

El vector pedido, será el vector unitario del vector gradiente $\vec{a}$ obtenido:

$$\vec{u}_a = \frac{1}{\sqrt{14}}\ \vec{u}_x + \frac{3}{\sqrt{14}} \vec{u}_y + \frac{2}{\sqrt{14}}\ \vec{u}_z$$

4.- CIRCULACIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL $\vec{F}$ (X, Y, Z). CAMPOS CONSERVATIVOS

Considérese, una cierta región del espacio donde existe un Campo de Vectores $\vec{F}$ (X, Y, Z), se define la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de una curva **γ** del campo, entre los puntos A y B como:



$$C = \int_{\gamma} \vec{F} \bullet \vec{dl} = \int_{A}^{B} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \quad \text{Siendo:} \quad \vec{dl} = (dx, dy, dz)$$

Caso Particular e Importante

Si $\vec{F}$ = grad U =∇U, la circulación se puede poner como $C = \int_{\gamma} \text{grad } U \,.\, dl = \int_{U_A}^{U_B} dU = U_A - U_B$

Introduciendo un nueva función escalar V tal que V(x, y, z) = - U (x, y, z) tendremos que

$C = \int_{U_A}^{U_B} dU = -\int_{V_A}^{V_B} d\,V = V_A - V_B$; Si la curva es cerrada $V_A = V_B$ y en consecuencia $C = \oint \mathbf{dV} = 0$

a **V(x,y,z)** se le llama potencial escalar del campo de vectores y se dice en este caso que el campo de vectores $\vec{F}$

deriva de un potencial escalar **V(x,y,z).**

Si un campo de vectores deriva de un Potencial Escalar V, se cumple que:

a) El campo es igual al grad V cambiado de signo.
b) La circulación del campo vectorial a lo largo de una curva es independiente del camino, únicamente depende del valor del valor del Potencial Escalar en los extremos de la curva.
c) La circulación a lo largo de cualquier curva cerrada vale cero.
   V (x, y, z) = cte. representa una superficie equipotencial.

Campos Conservativos

Si la circulación de un Campo Vectorial a lo largo de una curva es independiente del camino que se siga y únicamente depende de los puntos inicial y final el Campo se llama **CONSERVATIVO.**

Para todo campo CONSERVATIVO, se puede encontrar un campo Escalar del cual deriva.

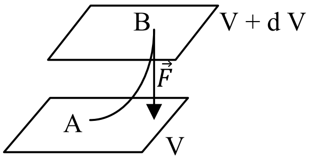
Se cumple asi mismo que si un campo vectorial deriva de un campo Escalar, el campo vectorial es CONSERVATIVO.

Dirección del campo

La circulación a lo largo de una superficie equipotencial será: $\int_A^B \vec{F} \bullet \vec{dl} = -\int_{V_A}^{V_B} d\,V = V_A - V_B = 0$ ya que al ser la superficie equipotencial $V_A = V_B$. Por tanto el campo es normal a las superficies equipotenciales.

Sentido del Campo

Sean dos superficies equipotenciales muy próximas con valores V y V + dV. El campo es normal a V y a V + d V

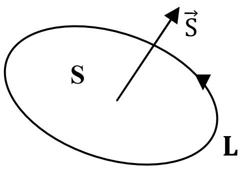


y por tanto tangente a AB. Como $\int_A^B \vec{F}.\ \vec{dl} = \int_V^{V+dV}$ (-dV)= V-(V+dV) = -dV .

Al ser $\vec{dl}$ tangente a la trayectoria y dirigido hacia B, resulta **que la dirección del campo es hacia hacia potenciales decrecientes.**

5.- <u>REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE UNA SUPERFICIE</u>

El módulo del producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, sabemos que representa el área del paralelogramo formado por los módulos de los dos vectores como lados. Este hecho sugiere la posibilidad de asociar un vector a un área.



Consideremos la superficie plana S de contorno **L** orientado. Por convenio, dicha superficie la podemos representar por un vector S de magnitud igual al área de la superficie, de dirección perpendicular al plano que la contiene y de sentido el dado por la regla de la mano derecha, cuando recorremos el contorno, según su orientación.

Componentes de S

Las Componentes de S, según los ejes de coordenadas, son iguales a la proyección de la superficie sobre los tres planos de coordenadas y coincide con las del vector S según los ejes.

Superficie no plana

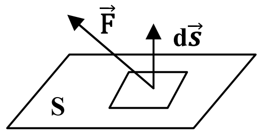
En este caso el valor de la superficie total, no coincide con la magnitud del vector S, obtenido sumando los vectores correspondientes a dividir la superficie en superficies planas.

Superficie cerrrada

El vector que representa una superficie cerrada es nulo, ya que dividida esta en n superficies planas cada una de estas superficies puede representarse un vector perpendicular a la misma y de sentido hacia fuera. Al sumar todos los vectores para obtener el vector $\vec{S}$ representativo del área total , se obtiene un vector nulo, ya que cada una de las n superficies tiene su correspondiente.

6.- FLUJO A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE . FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea una superficie S situada en un campo vectorial $\vec{F}$, se llama flujo elemental del campo a través del elemento de superficie $d\vec{S}$ a $d\phi = \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}$



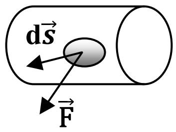
El flujo total a través de la superficie S será $\Phi = \iint_S \vec{F} . \overrightarrow{ds}$

Si $\vec{F} = (X, Y, Z)$ y $d\vec{S} = (ds_x, ds_y, ds_z)$ entonces $\phi = \iint_S X\, dS_x + \mathbf{Y}\, dS_y + \mathbf{Z}\, dS_z$

El flujo a través de una superficie, representa cualitativamente, el número de líneas de fuerza que atraviesan dicha superficie.

El flujo será máximo cuando la superficie sea normal al campo. El flujo será nulo, cuando la superficie sea paralela al campo.

El vector superficie $d\vec{S}$, se considera perpendicular a la superficie, su módulo el valor de la superficie dS y su sentido como positivo, cuando atraviesa la superficie de dentro a fuera.



Sentido Físico del Flujo

Supongamos que $\vec{F}$ es algo que se mueve, entonces el flujo es la cantidad de ese algo que sale o entra a través de S. Por ejemplo , en el movimiento de un fluido $\vec{F}$ puede representar la velocidad del fluido. El Flujo será la cantidad de fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo.

El Movimiento del fluido será ESTACIONARIO, si al considerar la superficie cerrada, la cantidad de líquido que entra (de fuera a dentro), es la misma que sale. En este caso se dice que el flujo es CONSERVATIVO.

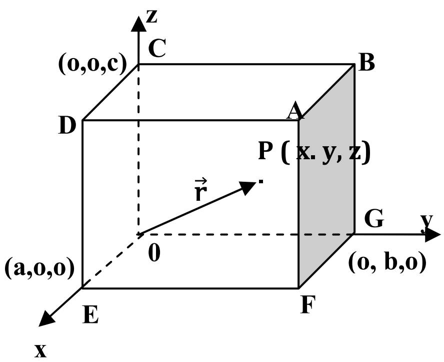
En el interior de la superficie se dice que: a) Hay Manantiales, si Sale más flujo que entra.
b) Hay Sumideros, si Entra más Flujo que sale.

El Flujo a través de una superficie, depende solo del contorno que la limite, no del tipo o forma de la superficie considerada para calcular el flujo.

Ejemplo.- Consideremos un campo vectorial dado por $\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$, que representa el vector de posición , en cartesianas de un punto cualquiera en el espacio **P (x. y, z)**, se pide:

a) El flujo **Φ** del campo vectorial dado, a través del paralelepípedo de aristas a, b y c, que tiene un vértice en el origen de coordenados y tres de sus planos coincidentes con los planos Z =0, X= 0 e Y=0, según se vé en la figura.

b) La circulación del campo vectorial dado a lo largo de los caminos **OCBA, OCDA, OEDA, OEFA, OGBA, OGFA.**



a) $\Phi = \oiint_s \vec{r} \cdot d\vec{s}$ **;** donde s es la superficie del paralelepípedo.

En las caras que están sobre los planos Z =0, X= 0 e Y=0, el campo vectorial $\vec{r}$ y el elemento de superficie $d\vec{s}$, son perpendiculares y el flujo es nulo, por tanto $\Phi_{OGFE} = \Phi_{OGBC} = \Phi_{OCDE} = 0$.

Flujo a través de la Cara ABCD

Su elemento de superficie es $d\vec{s}_z = dx\,dy\,\vec{u}_z$; $\Phi_{ABCD} = \iint_{S_Z} \vec{r} \cdot d\vec{s}_z =$

$$\iint_{S_Z} (X\,\vec{U}_X + Y\,\vec{U}_y + Z\,\vec{U}_z) \cdot dx\,dy\,\vec{u}_z = \iint_{S_Z} Z\,dx\,dy = \int_0^a c\,dx \int_o^b dy = cab$$

Los flujos a través de las caras ABGF y AFED, se calculan de forma similar resultando: $\Phi_{AFGB} = bac$ y $\Phi_{ADEF} = abc$.

$$\Phi_{total} = \Phi_{OGFE} + \Phi_{OGBC} + \Phi_{OCDE} + \Phi_{ABCD} + \Phi_{AFGB} + \Phi_{ADEF} = \mathbf{3\,abc = 3\,V}$$

Siendo **abc = V**, el volumen del paralelepípedo.

b) Circulación $C = \int_\gamma \vec{r} \cdot d\vec{l}$ **,** siendo γ el camino recorrido.

A lo largo del camino OCBA

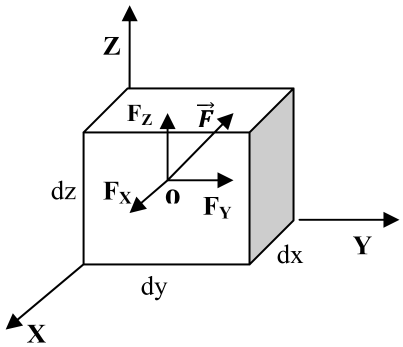
$$C_{OCBA} = \int_{OCBA} \vec{r} \cdot d\vec{l} = \int_{OC} \vec{r} \cdot d\vec{l} + \int_{CB} \vec{r} \cdot d\vec{l} + \int_{BA} \vec{r} \cdot d\vec{l} = \int_0^c z \cdot dz + \int_0^b y \cdot dy + \int_0^a x \cdot dx$$

Integrando se obtiene: $C_{OCBA} = \dfrac{c^2 + b^2 + a^2}{2}$

A lo largo de los caminos OCDA, OEDA, OEFA y OGBA el resultado es el mismo, $C = \dfrac{c^2 + b^2 + a^2}{2}$ por tanto se puede pensar que el campo vectorial $\vec{r}$ es CONSERVATIVO, y así es en efecto, si bien habría que demostrar que la circulación entre el punto **O** y el punto **A**, tiene siempre el mismo valor independientemente del camino seguido. Mas adelante veremos que basta probar que el campo $\vec{r}$ es IRROTACIONAL, para que quede demostrado que es CONSERVATIVO.

7.- DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL. TEOREMA DE GAUSS. CAMPOS SOLENOIDALES.

Consideremos el campo, vectorial $\vec{\mathbf{F}} = (F_x, F_y, F_z)$ y vamos a calcular su flujo a través de una superficie cerrada en cuyo centro o consideramos el campo. Como superficie cerrada vamos a tomar un paralepípedo elemental, de lados dx, dy, dz.



El flujo elemental total, será la suma de los flujos elementales a través de las seis caras del paralepipedo.

$$d\Phi_x = (F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{dx}{2})dy\,dz - (F_x - \frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{dx}{2})dy\,dz$$

$$d\Phi_y = (F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{dy}{2})dx\,dz - (F_y - \frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{dy}{2})dx\,dz$$

$$d\Phi_z = (F_z + \frac{\partial F_z}{\partial z}\frac{dz}{2})dx\,dy - (F_z - \frac{\partial F_z}{\partial z}\frac{dz}{2})dx\,dy$$

El flujo total será: $d\,\Phi = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$

Como el diferencial de volumen $dV = dx\,dy\,dz$, se puede poner $d\,\Phi = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dV$

Se define la DIVERGENCIA del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ como:

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\,\Phi}{dV} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla \bullet \vec{\mathbf{F}}}$$

Otra definición de Divergencia

Consideramos que en una cierta región del espacio, existe un campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$, que representa por ejemplo la velocidad de movimiento de un fluido.

Tomemos un cierto volumen **V** y dividámoslo en volúmenes elementales, de forma que en cada uno de estos volúmenes haya un solo manantial de campo. Tomemos como unidad la cantidad de líquido que mana de cada manantial en un instante de tiempo arbitrario. Estos manantiales serán así unitarios.

La cantidad de líquido que sale a través de una superficie genérica **S**, contenida en dicho espacio, que limita el volumen **V** será:

$$\Phi = \oiint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{ds}}$$

Si ρ es la densidad de manantiales unitarios, es decir el número de manantiales por unidad de volumen, entonces la cantidad de líquido que se crea en un volumen **V** limitado por una superficie **S**, será **ρV.**

Por tanto $\quad \Phi = \oiint \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{ds}} = \rho\mathbf{V}$

Se define la divergencia como la densidad de manantiales por unidad de volumen, es por tanto una función escalar.

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{F}} = \rho = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oiint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet d\vec{s}}$$

Campos Solenoidales

Si $\mathbf{div}\,\overrightarrow{\mathbf{F}} = 0$, no existen manantiales ni sumideros de campo, las Líneas de Campo o Líneas de Fuerza, son cerradas y el campo se denomina SOLENOIDAL.

La condición necesaria y suficiente para que un campo sea solenoidal, es que el flujo a través de cualquier superficie que se apoye en el mismo contorno sea el mismo.

Si el flujo de un campo SOLENOIDAL a través de una superficie cerrada, es cero, ya que el flujo a través de una parte de dicha superficie, es igual y contrario al flujo a través del resto.

TEOREMA DE GAUSS

Sigamos el razonamiento de "**otra definición de divergencia**".

El número de manantiales unitarios contenidos en un elemento de volumen **dv**, limitado por la superficie **ds** se puede poner como:

$$\rho\,\mathbf{dv} = \mathrm{div}\;\vec{\mathbf{F}}\;\mathbf{dv}$$

Como cada manantial unitario proporciona un volumen unitario, el flujo a través de ds será:

$\mathbf{d}\,\phi = \vec{\mathbf{F}} \bullet \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$ e igual al flujo producido en **dv** que es $\rho\,\mathbf{dv}$ Por tanto $\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{F}}\,\mathbf{dv} = \vec{\mathbf{F}} \bullet \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$ o bien

$$\boxed{\iiint \mathbf{div}\,\overrightarrow{\mathbf{F}}\;\mathbf{dv} = \oiint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{ds}} \quad \text{que constituye el } \textbf{TEOREMA DE GAUSS}}$$

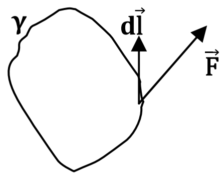
Ejemplo:

Como aplicación del teorema de Gauss, verificar que el flujo del campo vectorial $\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{x}\,\vec{\mathbf{u}}_x + \mathbf{y}\,\vec{\mathbf{u}}_y + \mathbf{z}\,\vec{\mathbf{u}}_z$, que representa el vector de posición en cartesianas de un punto cualquiera en el espacio **P (x. y, z),** a través de cualquier superficie cerrada, es tres veces el volumen encerrado por dicha superficie (resultado que se obtuvo en el ejemplo anterior).

Calculemos el valor de la divergencia: $\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{r}} = \nabla\bullet\,\vec{\mathbf{r}} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$

$\iiint_V \mathbf{div}\,\overrightarrow{\mathbf{F}}\;\mathbf{dv} = \iiint_V \mathbf{3\;dv} = \mathbf{3\;V}$ **y según el teorema de Gauss** $\iiint_V \mathbf{div}\,\overrightarrow{\mathbf{F}}\;\mathbf{dv} = \oiint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{ds}}$ **, flujo del campo vectorial** $\vec{\mathbf{r}}$**, luego** $\oiint_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \bullet \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}} = \mathbf{3V}$

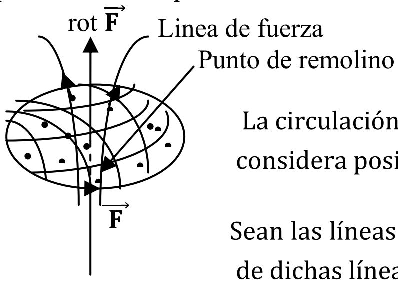
8.- <u>ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL. TEOREMA DE STOKES.</u>



Considérese un fluido en movimiento de rotación. Si $\vec{F}$ es el vector que representa la velocidad del fluido; se define la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de una línea cerrada **γ** contenida en la región donde está el campo $\vec{F}$ como C = $\oint_\gamma \vec{F} \bullet \vec{dl}$.

Normalmente, las partículas del fluido, se limitan a describir curvas cerradas alrededor de un eje, que consideramos normal al plano que contiene las trayectorias de las partículas.

Ocurre a veces que las partículas experimentan un movimiento ascendenten de translación (movimiento de remolino), cuando sucede esto, existe además del campo $\vec{F}$ otro campo de vectores que llamamos rotacional y que representaremos por $\vec{E} = \text{rot } \vec{F}$.



La circulación del Campo $\vec{F}$ a lo largo de la línea cerrada, que se indicó anteriormente, se considera positiva, si coincide con la indicada por rot $\vec{F}$

Sean las líneas de fuerza del vector **rot** $\vec{F}$. Se llaman puntos de remolino, a la intersección de dichas líneas de fuerza con la superficie, normal a **rot** $\vec{F}$**.**

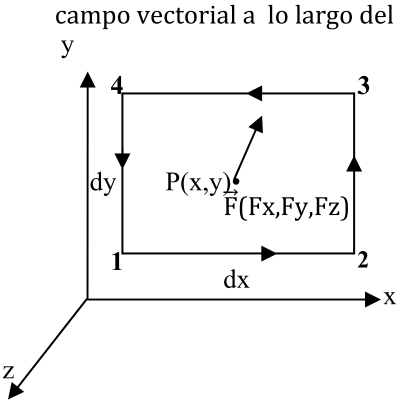
Dividamos la superficie **S**, en una serie de n superficies elementales. La circulación total, a lo largo del contorno de la superficie **S**, se puede poner como suma de las circulaciones a lo largo del contorno de cada superficie elemental, o **n** veces una de ellas ya que son iguales, $C = n\, C_i$.

Las Celdillas que resultan al dividir la superficie **S**, son tales que únicamente, son atravesadas por una línea de fuerza, luego cada celdilla contiene un solo punto de remolino.

Tomando como circulación unitaria, la de cada celdilla, se define el rotacional del campo vectorial $\vec{F}$, **rot** $\vec{F}$ como la Densidad Superficial de Puntos de Remolino en la superficie S. Como hay tantos puntos de remolino como celdillas y tantas celdillas como circulaciones elementales, cuya suma es $C = \oint_\gamma \vec{F} \bullet \vec{dl}$; se puede expresar el rot de $\vec{F}$, como: $\text{rot } \vec{F} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_\gamma \vec{F} \bullet \vec{dl}$

Determinemos las componentes cartesianas del vector rotacional

Pensemos en un punto **P** de coordenadas **x, y** situado en un campo vectorial. Considerese un cuadrado elemental de dimensiones **dx , dy** de manera que el punto **P (x,y),** esté en su centro geométrico. en una región donde esta definido un campo vectorial cuyo valor en el punto P(x,y) es $\vec{F}$**(x,y,z)** deseamos calcular la circulación de este campo vectorial a lo largo del cuadrado.



Supongamos que el valor del campo no cambia sustancialmente a lo largo de cualquier lado del cuadrado, ya que este es de dimensiones elementales. Para calcular la circulación a lo largo del cuadrado, tenemos que conocer el valor del campo vectorial en cada lado.

El valor del campo vectorial en los diferentes lados será:

Lado 12 : $F_x - \frac{\partial F_x}{\partial Y} \frac{dy}{2}$ **Lado 34:** $F_x + \frac{\partial F_x}{\partial Y} \frac{dy}{2}$

Lado 23: $F_y + \frac{\partial F_y}{\partial X} \frac{dx}{2}$ **Lado 41:** $F_y - \frac{\partial F_y}{\partial X} \frac{dx}{2}$

Pensando que la circulación elemental a lo largo del camino elemental **dx**, es el producto escalar del valor del campo vectorial en **dx** por el vector $\mathbf{d\vec{x}}$, podemos expresar la circulacion a lo largo de nuestro cuadrado elemental cuando se recorre en el sentido marcado (contrario a las agujas del reloj) como :

$$dC_z = dC_{12} + dC_{23} + dC_{34} + dC_{41}$$

$$dC_z = \left(F_x - \frac{\partial F_x}{\partial Y}\frac{dy}{2}\right) dx + \left(F_Y + \frac{\partial F_Y}{\partial X}\frac{dX}{2}\right) dy + \left(F_x + \frac{\partial F_X}{\partial Y}\frac{dy}{2}\right)(-dx) + \left(F_Y - \frac{\partial F_Y}{\partial X}\frac{dx}{2}\right)(-dy) =$$

$$-\frac{\partial F_X}{\partial Y} dy\, dx + \frac{\partial F_Y}{\partial X} dx\, dy = \left(\frac{\partial F_Y}{\partial X} - \frac{\partial F_X}{\partial Y}\right) dx\, dy = \left(\frac{\partial F_Y}{\partial X} - \frac{\partial F_X}{\partial Y}\right) \left|d\vec{S}_z\right| \qquad \textbf{Componente z del rotacional de } \vec{F}$$

Siendo $\left|\vec{S}_z\right|$ **= dx dy** el area elemental del cuadrado en el plano **z = 0 .**

Si hacemos lo mismo en el plano **yz (x = 0)** y el **zx (y = 0)**, obtendremos:

$$dC_x = \left(\frac{\partial Z}{\partial Y} - \frac{\partial Y}{\partial Z}\right) \left|d\vec{S}_x\right| \quad y \quad dC_x = \left(\frac{\partial X}{\partial Z} - \frac{\partial Z}{\partial X}\right) \left|d\vec{S}_y\right| \qquad \textbf{Componentes x e y del rotacional de } \vec{F}$$

El rot del campo vectorial $\vec{F}$ se puede expresarse Matemáticamente como :

$$\boxed{\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_x & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_Y & F_Z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z}$$

TEOREMA DE STOKES

Como el valor de la circulación del campo a lo largo de una línea cerrada, nos da el número de puntos de remolino sobre la superficie que encierra dicha línea y se ha definido el rotacional, como la densidad superficial de puntos de remolino, si consideramos una superficie **ds** limitada por un contorno **dl** el número de puntos de remolino se puede poner como: $\textbf{rot}\ \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{ds}}$ bien como $\vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{dl}}$ y para una superficie **s** limitada por un contorno **γ :**

$$\boxed{\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{dl}} = \iint_s \text{rot}\ \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{ds}} \qquad \textbf{TEOREMA DE STOKES}}$$

Teorema de Stokes.- La circulación del campo vectorial F a lo largo de una línea cerrada, es igual al número total de puntos de remolino sobre la superficie que limita dicha línea.

El campo **rot** $\vec{\mathbf{F}}$, es solenoidal, pues se cumple que $\textbf{div rot}\ \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$ y si aplicamos el teorema de Gauss:

$\oiint_S \textbf{rot}\ \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{ds}} = \iiint_V \text{div}\left(\text{rot}\ \vec{\mathrm{F}}\right)\text{dv}$, se obtiene que $\oiint_S \text{rot}\ \vec{\mathrm{F}} \bullet \vec{\mathrm{ds}} = 0$, siendo S una superficie cerrada.

Esto supone que el campo rot $\vec{\mathrm{F}}$ es solenoidal y por tanto sus líneas de fuerza son cerrados, lo cual indica que rot $\vec{\mathrm{F}}$ no tiene sin manantiales ni sumideros de campo, separados.

Conclusiones

a) El número de puntos de remolino situados sobre dos superficies, que se apoyan en el mismo contorno es el mismo

b) El campo **rot** $\vec{\mathbf{F}}$, es solenoidal. Sus líneas de campo son cerradas, no es posible la existencia de manatiales o sumideros de campo, de manera separada, unos de otros.

Campo Irrotacional

Si un campo vectorial $\vec{\mathrm{F}}$ cumple que la circulación a lo largo de cualquier línea cerrada es cero $\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{dl}} = 0$ se dice que el campo $\vec{\mathbf{F}}$ es IRROTACIONAL y deriva de un potencial escalar, o lo que es lo mismo, el campo $\vec{\mathbf{F}}$ es CONSERVATIVO y se puede expresar como el gradiente de un campo escalar que llamamos su potencial escalar.
Si el campo $\vec{\mathbf{F}}$ es IRROTACIONAL mediante el teorema de Stokes, $\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{dl}} = 0 = \iint_S \textbf{rot}\ \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{ds}}$ se verifica que en todos sus puntos $\textbf{rot}\ \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$.

Recordar.- Si un campo es Irrotacional:

a) Es Conservativo.
b) Se puede expresar como el gradiente de un campo Escalar que denominamos, Potencial Escalar.
c) Su Rotacional es cero.
d) Para demostrar que un campo es CONSERVATIVO, basta verificar que su rotacional es cero.

Ejemplo.- Calcular el rotacional del campo vectorial $\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{x}\ \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{x} + \mathbf{y}\ \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{y} + \mathbf{z}\ \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{z}$, que representa el vector de posición , en cartesianas de un punto cualquiera en el espacio $\mathbf{P\ (\ x.\ y,\ z)}$.

$$\textbf{rot}\ \vec{\mathbf{r}} = \nabla \times \vec{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_x & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{u}_z = \mathbf{0}$$

Se trata por tanto de un campo irrotacional y en consecuencia $\vec{\mathbf{r}}$ es CONSERVATIVO.

9.- EL OPERADOR LAPLACIANA. LAPLACIANA DE UN CAMPO ESCALAR Y LAPLACIANA DE UN CAMPO VECTORIAL

Se define el operador LAPLACIANA Δ como el operador nabla aplicado escalarmente al mismo operador nabla. Es por tanto un ESCALAR.

$$\Delta = \nabla \bullet \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right) \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right) = \frac{\partial^2}{\partial^2 X} + \frac{\partial}{\partial^2 Y}^2 + \frac{\partial}{\partial^2 Z}^2$$

Veamos como actua sobre campos escalares y sobre campos vectoriales:

Laplaciana de un Campo Escalar V (x, y, z)

$$\Delta V = \nabla \bullet \nabla V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}$$

Laplaciana de un Campo Vectorial $\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y + F_z \vec{u}_z$

$$\Delta\vec{F} = \nabla \bullet \nabla \vec{F} = \nabla^2\vec{F} = \frac{\partial^2\vec{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{F}}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2\vec{F}_x}{\partial x^2}\vec{u}_x + \frac{\partial^2\vec{F}_y}{\partial x^2}\vec{u}_y + \frac{\partial^2\vec{F}_z}{\partial x^2}\vec{u}_y\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2\vec{F}_x}{\partial^2 y}\vec{u}_x + \frac{\partial^2\vec{F}_y}{\partial^2 y}\vec{u}_y + \frac{\partial\vec{F}_z}{\partial^2 y}\vec{u}_z\right) + \left(\frac{\partial^2\vec{F}_x}{\partial z^2}\vec{u}_x + \frac{\partial\vec{F}_y}{\partial z^2}\vec{u}_y + \frac{\partial^2\vec{F}_z}{\partial z^2}\vec{u}_z\right)$$

Agrupando quedará:

$$\Delta\vec{F} = \nabla \bullet \nabla \vec{F} = \nabla^2\vec{F} = \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial X^2} + \frac{\partial F_x}{\partial Y^2}^2 + \frac{\partial F_x}{\partial Z^2}^2\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial Z^2}\vec{u}_y\right) +$$

$$\left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}\right)\vec{u}_z$$

Laplaciana de un vector

$$\Delta\vec{F} = \nabla \bullet \nabla \vec{F} = \nabla^2 F_x \vec{u}_x + \nabla^2 F_y \vec{u}_y + \nabla^2 F_z \vec{u}_z = \Delta F_x \vec{u}_x + \Delta F_y \vec{u}_x + \Delta F_z \vec{u}_x$$

Ejemplo.- Calcular la LAPLACIANA del campo escalar $\frac{1}{r}$, siendo r el módulo del vector de posición, en cartesianas, de un punto cualquiera **P (x. y, z),** del espacio. $\mathbf{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\Delta\vec{r} = \nabla \bullet \nabla \frac{1}{r}\ ; \quad \nabla \frac{1}{r} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\vec{u}_z \quad \textbf{(1)}$$

Calculemos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3};$$ **de igual manera**: $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} = -\frac{y}{r^3};\ \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$

Sustituyendo en (1) queda : $\nabla\frac{1}{r} = -\frac{x}{r^3}\vec{u}_x - \frac{y}{r^3}\vec{u}_y - \frac{z}{r^3}\vec{u}_z = -\frac{X\vec{u}_x + Y\vec{u}_x + Z\vec{u}_x}{r^3} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

$$\Delta\vec{r} = \nabla \bullet \nabla \frac{1}{r} = \frac{\partial\left(-\frac{x}{r^3}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-\frac{y}{r^3}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(-\frac{z}{r^3}\right)}{\partial z} = \frac{-3r^3 + x3r^2\frac{x}{r}}{r^6} + \frac{-3r^3 + y3r^2\frac{y}{r}}{r^6} + \frac{-3r^3 + y3r^2\frac{y}{r}}{r^6} = \frac{-3r^3 + 3r\,r^2}{r^6} = \mathbf{0}$$

10.- OPERACIONES CON EL OPERADOR NABLA.

Sean **φ** y **ψ** dos campos escalares y **c** una constante.

grad (c ψ)= c grad ψ ; **grad (φ +ψ)** = ∇ (φ +ψ) = ∇ φ +∇ ψ ;

grad (φ • ψ) =∇ (φ • ψ) = ψ ∇ φ + φ ∇ ψ

grad ($\vec{F} \bullet \vec{G}$) = $\nabla (\vec{F} \bullet \vec{G}) = (\vec{F} \bullet \nabla)\vec{G} + (\vec{G} \bullet \nabla)\vec{F} + \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F})$

div(c $\vec{F}$) = c div $\vec{F}$; div ($\vec{F} + \vec{G}$) = $\nabla \bullet (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \bullet \vec{F} + \nabla \bullet \vec{G}$

div (ψ $\vec{F}$) = $\nabla \bullet (\psi \vec{F}) = \vec{F} \bullet \nabla \psi + \psi \, \nabla \bullet \vec{F}$

div ($\vec{F}$ x $\vec{G}$) = $\nabla \bullet (\vec{F} \times \vec{G}) = -\vec{F} \bullet \nabla \times \vec{G} + \vec{G} \bullet \nabla \times \vec{F}$

rot (c $\vec{F}$) = c rot $\vec{F}$; rot ($\vec{F}$ x $\vec{G}$) = $\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F} (\nabla \bullet \vec{G}) + (\vec{G} \bullet \nabla)\vec{F} - \vec{G} (\nabla \bullet \vec{F}) - (\vec{F} \bullet \nabla)\vec{G}$

rot x rot $\vec{F} = \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla (\nabla \bullet \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$

grad div $\vec{F}$ = 0 ; **div rot $\vec{F}$ = 0 ;** **rot grad ψ = 0**

$$\begin{tikzcd} \textbf{grad} \arrow[r, "= 0"] & \textbf{div} \arrow[r, "= 0"] & \textbf{rot} \arrow[ll, bend left, "= 0"] \end{tikzcd}$$

RECORDAR

- ✓ **OPERADOR GRADIENTE O NABLA** **grad = ∇=** $\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$

  OPERADOR LAPLACIANA $\Delta = \nabla \bullet \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}$

- ✓ **Grad a = ∇ a (vector) ; Div $\vec{F} = \nabla \bullet \vec{F}$ (escalar); rot $\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ (vector)**

- ✓ **TEOREMA DE GAUSS:** $\iiint \mathbf{div}\,\vec{F}\,\mathbf{dv} = \oint\!\!\oint \vec{F} \bullet \overrightarrow{ds}$

- ✓ **TEOREMA DE STOKES** $\oint_{\gamma} \vec{F} \bullet \overrightarrow{dl} = \iint_{S} \mathbf{rot}\,\vec{F} \bullet \overrightarrow{ds}$

- ✓ **Grad a = ∇ a (vector) ; Div $\vec{F} = \nabla \bullet \vec{F}$ (escalar); rot $\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ (vector) .**