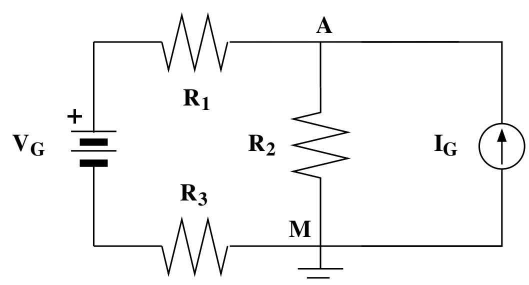
FUNDAMENTOS FÍSICOS Y TECNOLÓGICOS DE LA INFORMÁTICA
7 de Noviembre de 2014

NOMBRE . . . .
APELLIDOS . . . .

Primer Problema: Dado el circuito de la figura, y conocidos R_1, R_2, R_3, I_G y V_G se pide:

1. La tensión en el nudo A en función de los datos conocidos aplicando el método de nudos **(4 puntos)**.
2. Hallar las corrientes que circulan por las resistencias en función de los datos conocidos, aplicando el método de mallas **(4 puntos)**.
3. Hallar las potencias generadas y disipadas en el circuito verificando que se cumple el balance (equilibrio) entre ellas. Utilizar las expresiones obtenidas en los anteriores apartados y, sólo para este apartado, los siguientes valores: $R_1 = 3K\Omega$, $R_2 = 1K\Omega$, $R_3 = 6K\Omega$, $I_G = 1$ mA y $V_G = 11$V; **(2 puntos)**.



1. Nudos

Aparte del de referencia M, en el que $V_M = 0$, realmente sólo hay que plantear la ecuación del nudo A. Tomando como salientes las corrientes por las resistencias R_1 y R_2, se tendrá:

$$I_G = \frac{V_A}{R_2} + \frac{V_A - V_G}{R_1 + R_3} \qquad \Longrightarrow \qquad V_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3}\left[V_G + I_G(R_1 + R_3)\right] \tag{1}$$

2. Mallas

Hay dos mallas, pero realmente la corriente de una de las mallas está determinada por el generador de corriente. En la figura 1 se muestra como hemos escogido los sentidos de las corrientes de malla.

Con ello tendremos:

$$I(R_1 + R_2 + R_3) + I_G R_2 = V_G \qquad \Longrightarrow \qquad I = \frac{V_G - I_G R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{2}$$

La corriente I_2 resulta ser:

$$I_2 = I_G + I = \frac{V_G + I_G(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{3}$$

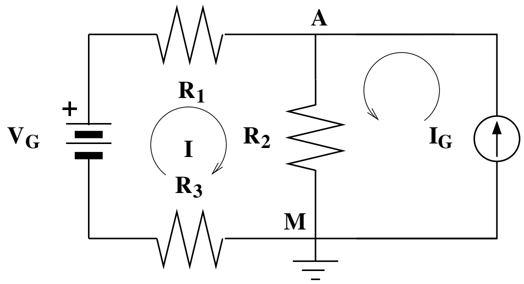


Figura 1: Sentido de las mallas

3. Potencias

Con los datos que se nos proporcionan resulta ser:

$$V_A = 2\,\mathrm{V} \quad (4)$$
$$I = 1\,\mathrm{mA} \quad (5)$$
$$I_2 = 2\,\mathrm{mA} \quad (6)$$

Con ello, las potencias entregadas por los generadores serán:

$$W_I = I_G \times V_A = 1\,\mathrm{mA} \times 2\,\mathrm{V} = 2\,\mathrm{mW} \quad (7)$$
$$W_V = I \times V_G = 1\,\mathrm{mA} \times 11\,\mathrm{V} = 11\,\mathrm{mW} \quad (8)$$

Lo que hace un total de 13 mW. Las potencias en las resistencias son:

$$W_1 = I^2 \times R_1 = (1\,\mathrm{mA})^2 \times 3\,\mathrm{k}\Omega = 3\,\mathrm{mW} \quad (9)$$
$$W_2 = I_2^2 \times R_2 = (2\,\mathrm{mA})^2 \times 1\,\mathrm{k}\Omega = 4\,\mathrm{mW} \quad (10)$$
$$W_1 = I^2 \times R_3 = (1\,\mathrm{mA})^2 \times 6\,\mathrm{k}\Omega = 6\,\mathrm{mW} \quad (11)$$

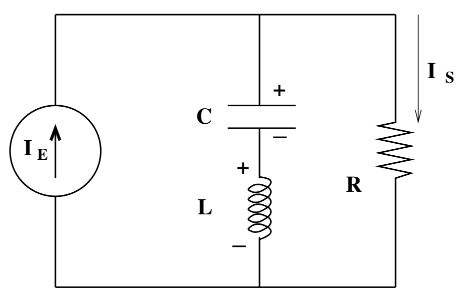
Y naturalmente las potencias totales entregadas y consumidas son iguales: 13 mW.

FUNDAMENTOS FÍSICOS Y TECNOLÓGICOS DE LA INFORMÁTICA
7 de Noviembre de 2014

NOMBRE ....
APELLIDOS ....

Segundo Problema: Dado el circuito de la figura, siendo $I_e(t) = I_0 \cos(\omega t)$, con $I_0 > 0$, se pide:

1. Expresión del fasor de la tensión de entrada I_E; **(1 punto)**.
2. Hallar las impedancias del condensador y de la bobina y la impedancia total de dichos elementos, tal y como están conectados; **(2 puntos)**.
3. Hallar la expresión del fasor de la corriente en la salida I_S. Se recomienda dejarlo expresado únicamente en función de I_0, ω, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ y $1/Q = \omega_0 RC$; **(3 puntos)**.
4. Supuesto que $I_0 = 10$ mA, $\omega = \omega_0$, $L = 10$ mH, $C = 10$ nF y $R = 1000\ \Omega$, hallar en este caso particular la expresión de los fasores de la corriente en la salida I_S y de la tensión en la bobina y en el condensador, V_L y V_C; **(2 puntos)**.
5. Expresión temporal de la tensión en la bobina $v_L(t)$ y en el condensador $v_C(t)$, correspondientes a los fasores hallados en el apartado anterior; **(2 puntos)**.



1. Fasor de la entrada

$$I_E = I_0 = I_0 e^{j0}; \tag{1}$$

Si I_0 hubiese sido un número negativo y se hubiese querido escribir en forma módulo–argumental, habríamos tenido que poner $|I_0|e^{-j\pi}$.

2. Impedancias

$$Z_L = j\omega L; \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \tag{2}$$

$$Z_S \equiv Z_L + Z_C = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \tag{3}$$

3. Fasor de la tensión de salida

El circuito es básicamente un divisor de corriente. Sin necesidad de recordar la ecuación del divisor de corriente, llamando V_S a la tensión del nodo al que llega la corriente del generador, podemos escribir:

$$I_0 = \frac{V_s}{Z_s} + \frac{V_s}{R} \qquad \Longrightarrow \qquad V_s = I_0 \frac{I}{\dfrac{1}{Z_s} + \dfrac{1}{R}} = I_0 \frac{RZ_s}{R + Z_S}; \tag{4}$$

Como por otra parte, $I_S = V_S/R$, obtenemos:

$$I_S = I_0 \frac{Z_s}{R + Z_S} = I_0 \frac{j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} = I_0 \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \tag{5}$$

Este resultado ya es correcto, pero dado que se recomienda expresarlo en función de ω_0 y Q, teniendo en cuenta además que $LC = 1/\omega_0^2$, se tiene inmediatamente:

$$I_S = I_0 \frac{1 - (\omega^2/\omega_0^2)}{1 - (\omega^2/\omega_0^2) + \dfrac{j(\omega/\omega_0)}{Q}} \tag{6}$$

4. Caso $\omega = \omega_0$

Para el caso particular que nos ocupa, el fasor de la corriente de salida I_S es claramente cero, porque el numerador de la expresión (6) se anula, pero el denominador no. Dado que no hay corriente por la resistencia, toda la corriente del generador tiene que circular por la bobina y el condensador por lo que:

$$V_L = I_0 j\omega_0 L \tag{7}$$

$$V_C = \frac{I_0}{j\omega_0 C} \tag{8}$$

Sustituyendo valores, se obtiene $\omega_0 = 10^5$ rad/s. Con ello obtenemos:

$$V_L = 10 \times 10^{-3} \times 10^5 \times 10^{-2} j = j10 \tag{9}$$

$$V_C = -j \frac{10 \times 10^{-3}}{10^5 \times 10^{-8}} = -j10 \tag{10}$$

La suma de las tensiones de la bobina y el condensador es cero, por lo que por tensión en la resistencia es cero, como no puede ser de otra forma para que la corriente por la resistencia sea cero.

5. Expresiones temporales de las tensiones

A partir de los resultados anteriores tendremos:

$$v_L(t) = 10\cos(10^5 t + \frac{\pi}{2}) = -10\sin(10^5 t)\,\mathrm{V} \tag{11}$$

$$v_C(t) = 10\cos(10^5 t - \frac{\pi}{2}) = 10\sin(10^5 t)\,\mathrm{V} \tag{12}$$