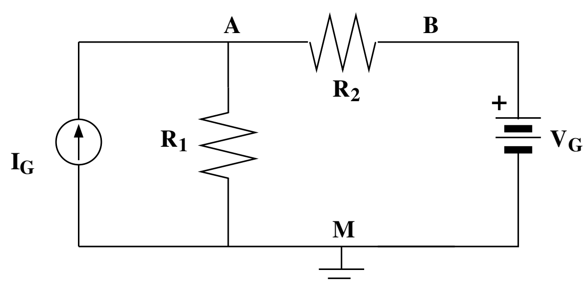
FUNDAMENTOS FÍSICOS Y TECNOLÓGICOS DE LA INFORMÁTICA
31 de Octubre de 2014

NOMBRE ....
APELLIDOS ....

Primer Problema: Dado el circuito de la figura, se pide:

1. Resolver el circuito por nudos, es decir, hallar la expresión de la tensión en todos los nudos en función de R_1, R_2, I_G y V_G ; **(4 puntos)**.
2. Resolver el circuito por mallas, es decir, hallar la expresión de todas las corrientes de mallas en función de R_1, R_2, I_G y V_G; **(4 puntos)**.
3. Tómese únicamente en este último apartado: $R_1 = R_2 = 1K\Omega$, $I_G = 2$ mA y $V_G = 10$V. Con estos datos y en base a las expresiones halladas anteriormente, hallar la potencia disipada por cada resistencia y la entregada por los generadores, comprobando el balance de potencias; **(2 puntos)**.



1. Nudos

Aparte del de referencia M, en el que $V_M = 0$, hay sólo dos nudos A y B. La tensión en el nudo B la conocemos:

$$V_B = V_G \tag{1}$$

Luego realmente sólo hay que plantear la ecuación del nudo A. Tomando como salientes las corrientes por las resistencias R_1 y R_2, se tendrá:

$$I_G = \frac{V_A}{R_1} + \frac{V_A - V_G}{R_2} \qquad \Longrightarrow \qquad V_A = \frac{I_G + V_G/R_2}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} = \frac{I_G R_1 R_2 + V_G R_1}{R_1 + R_2} \tag{2}$$

2. Mallas

Hay dos mallas, pero realmente la corriente de una de las mallas está determinada por el generador de corriente. En la figura 1 se muestra como hemos escogido los sentidos de las corrientes de malla.

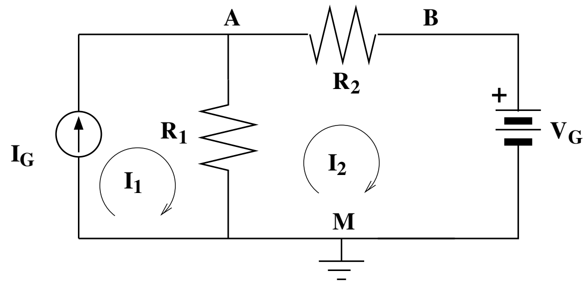


Figura 1: Sentido de las mallas

Con ello tendremos:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= I_G && (3)\\
0 &= (I_2 - I_1)R_1 + I_2R_2 + V_G \qquad \Longrightarrow \\
I_2 &= \frac{I_GR_1 - V_G}{R_1 + R_2} && (4)
\end{aligned}
$$

3. Potencias

Con los datos que se nos proporcionan resulta ser:

$$
\begin{aligned}
V_A &= 6\,\mathrm{V} && (5)\\
I_2 &= -4\,\mathrm{mA} && (6)
\end{aligned}
$$

Con ello, las potencias entregadas por los generadores serán:

$$
\begin{aligned}
W_I &= 2\,\mathrm{mA} \times 6\,\mathrm{V} = 12\,\mathrm{mW} && (7)\\
W_V &= 4\,\mathrm{mA} \times 10\,\mathrm{V} = 40\,\mathrm{mW} && (8)
\end{aligned}
$$

Nótese que, al salir negativa I_2, ello significa que realmente es una corriente que sale del generador de tensión y por tanto éste está entregando potencia.

Las potencias en las resistencias son:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \frac{(6\,\mathrm{V})^2}{1\,\mathrm{k}\Omega} = 36\,\mathrm{mW} && (9)\\
W_2 &= (-4\,\mathrm{mA})^2 \times 1\,\mathrm{k}\Omega = 16\,\mathrm{mW} && (10)
\end{aligned}
$$

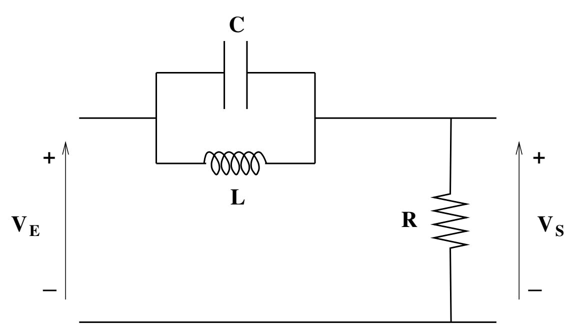
Y naturalmente las potencias totales entregadas y consumidas son iguales: 52 mW.

FUNDAMENTOS FÍSICOS Y TECNOLÓGICOS DE LA INFORMÁTICA
31 de Octubre de 2014

NOMBRE ....
APELLIDOS ....

Segundo Problema: Dado el circuito de la figura, siendo $v_e(t) = A\cos(\omega t)$, con $A > 0$, se pide:

1. Expresión del fasor de la tensión de entrada V_E; **(1 punto)**.
2. Hallar las impedancias del condensador y de la bobina y la impedancia total de dichos elementos, tal y como están conectados; **(2 puntos)**.
3. Hallar la expresión del fasor de la tensión en la salida V_S. Se recomienda dejarlo expresado únicamente en función de A, ω, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ y $Q = \omega_0 L/R$; **(3 puntos)**.
4. Supuesto que $A = 10$ V, $\omega = \omega_0$, $L = 10$ mH, $C = 10$ nF y $R = 1000\ \Omega$, hallar en este caso particular la expresión de los fasores de la tensión en la salida V_S y de la corriente en la bobina y en el condensador, I_L e I_C; **(2 puntos)**.
5. Expresión temporal de la corriente en la bobina $i_L(t)$ y en el condensador $i_C(t)$, correspondientes a los fasores hallados en el apartado anterior; **(2 puntos)**.



1. Fasor de la entrada

$$V_E = A = Ae^{j0}; \tag{1}$$

Si A hubiese sido un número negativo y se hubiese querido escribir en forma módulo–argumental, habríamos tenido que poner $|A|e^{-j\pi}$.

2. Impedancias

$$Z_L = j\omega L; \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \tag{2}$$

$$Z_P \equiv Z_L||Z_C = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{j\omega L \times \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC} \tag{3}$$

3. Fasor de la tensión de salida

El circuito es básicamente un divisor de tensión. Si llamamos I a la corriente que proporciona la entrada, tendremos:

$$I = \frac{V_E}{Z_P + R} \tag{4}$$

Con lo que la tensión en la salida será $V_S = IR$, es decir:

$$V_S = A\frac{R}{R+Z_P} = A\frac{R}{R + \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}} \tag{5}$$

$$= A\frac{(1-\omega^2 LC)R}{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L} \tag{6}$$

Este resultado ya es correcto, pero dado que se recomienda expresarlo en función de ω_0 y Q, dividiendo por R numerador y denominador y teniendo en cuenta que $LC = 1/\omega_0^2$, se tiene inmediatamente:

$$V_S = A\frac{1-(\omega^2/\omega_0^2)}{1-(\omega^2/\omega_0^2) + jQ(\omega/\omega_0)} \tag{7}$$

No necesariamente hay que resolver este apartado como un divisor de tensión. Planteando el lema de Kirchhoff de las corrientes en el nodo de salida se tiene:

$$\frac{V_S}{R} + \frac{V_S - V_E}{j\omega L} + (Vs - V_E)j\omega C = 0 \tag{8}$$

De donde se puede deducir inmediatamente la expresión de la tensión de salida.

4. Caso $\omega = \omega_0$

para el caso particular que nos ocupa, el fasor de la tensión de salida es claramente cero, porque el numerador de la expresión (7) se anula, pero el denominador no. Dado que la tensión en la salida es cero, toda la tensión del generador cae en la bobina y en la resistencia, por lo que:

$$I_L = \frac{V_E}{j\omega_0 L} \tag{9}$$

$$I_C = j\omega_0 C V_E \tag{10}$$

Sustituyendo valores, se obtiene $\omega_0 = 10^5$ rad/s. Con ello obtenemos:

$$I_L = \frac{10}{10^5 \times 10^{-2} j} = -j10^{-2} \tag{11}$$

$$I_C = j10^5 \times 10^{-8} \times 10 = j10^{-2} \tag{12}$$

La suma de las corrientes que llegan por la bobina y el condensador a la resistencia es cero, por lo que por la resistencia no pasa corriente, con lo que efectivamente la tensión en la salida es cero.

5. Expresiones temporales de las corrientes

Empleando miliamperios, a partir de los resultados anteriores tendremos:

$$
\begin{aligned}
i_L(t) &= 10\cos(10^5 t - \frac{\pi}{2}) = 10\sin(10^5 t)\,\mathrm{mA} \qquad (13)\\
i_C(t) &= 10\cos(10^5 t + \frac{\pi}{2}) = -10\sin(10^5 t)\,\mathrm{mA} \qquad (14)
\end{aligned}
$$